18/2/19

Γενικές Πληροφορίες
Δευτέρα 12-2 και Παρασκευή 9-12
Αίθουσα 010
Ιστοσελίδα Μαθήματος
Συγγράμματα : Βάρσος ή Αποστολίδης

Μέρη Μαθήματος

1) Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα - Χαρακτηριστικό πολυώνυμο - Ελάχιστο πολυώνυμο - Θεώρημα Cayley-Hamilton - Διαγωνοποίηση - Τριγωνοποίηση
2) Ευκλείδειοι χώροι - Διαδικασία Gramm-Schmidt - Ορθοκανονικές βάσεις - ορθογώνιοι πίνακες - Ισομετρίες
3) Αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός - συμμετρικοί πίνακες - φασματικό θεώρημα - θετικοί/μη αρνητικοί πίνακες - τετραγωνικές ρίζες πινάκων
4) Τετραγωνικές μορφές - Κύριοι άξονες

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ : → Γραμμικές Απεικονίσεις $f: E \to E$, όπου $\dim_{K} E < \infty$
→ Τετραγωνικοί πίνακες $A \in M_n(K)$

K: σώμα (συνήθως $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

→ Αν $f: E \to E$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_K E = n < \infty$ και β = βάση του E, τότε ορίζεται ο πίνακας $A = M_{\beta}^{\beta}(f)$. Έστω e = βάση του E και έστω ότι $B = M_e^e(f)$ =>
=> Τότε οι πίνακες A και B είναι όμοιοι : υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P : $\boxed{P^{-1}AP = B}$

Κεντρικό Πρόβλημα : ① Έστω $f: E \to E$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_K E < \infty$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, βάση β του E : $M_{\beta}^{\beta}(f)$ να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή, δηλαδή να είναι διαγώνιος ή άνω τριγωνικός

② Έστω $A \in M_n(K)$. Έστω ο A όμοιος με έναν πίνακα B ο οποίος έχει την απλούστερη δυνατή μορφή : Ισοδύναμα, να βρεθεί αν υπάρχει, αντιστρέψιμος πίνακας $P: P^{-1}AP$ = διαγώνιος - άνω τριγωνικός...

→ Έστω $f: E \to E$ μια γραμμική απεικόνιση, $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$
Πρόβλημα: Υπάρχουν υπόχωροι $V_1, V_2, \dots, V_k$ του E έτσι ώστε
$E = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ και $\forall \vec{x} \in V_i: f(\vec{x}) \in V_i$, $1 \le i \le k$
$f_i: V_i \to V_i$, $f_i(\vec{x}) = f(\vec{x})$ $1 \le i \le k$

Ευθέα Αθροίσματα Υποχώρων
Έστω $\mathbb{K}$: σώμα και E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος
Αν $V_1, V_2, \dots, V_n$: υπόχωροι του E, τότε το άθροισμα $V_1, V_2, \dots, V_n$ ορίζεται να είναι $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_n} \in E \mid x_i \in V_i, 1 \le i \le n\}$

Ισχυρισμός ① Το υποσύνολο $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ είναι υπόχωρος του E και μάλιστα είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E, ο οποίος περιέχει τους $V_1, V_2, \dots, V_n$
Απόδειξη: Εύκολα το υποσύνολο $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ είναι υπόχωρος του E
$\forall i = 1, \dots, n: V_i \subseteq V_1 + \dots + V_n$, διότι $\forall \vec{x} \in V_i$:
$\vec{x} = \underset{\in V_1}{\vec{0}} + \dots + \underset{\in V_{i-1}}{\vec{0}} + \underset{\in V_i}{\vec{x}} + \underset{\in V_{i+1}}{\vec{0}} + \dots + \underset{\in V_n}{\vec{0}} \in V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Αν V: υπόχωρος του E έτσι ώστε $V_i \subseteq V$, $\forall i = 1, \dots, n$
Τότε $V_1 + V_2 + \dots + V_n \subseteq V$, διότι: $\forall \vec{x} \in V_1 + V_2 + \dots + V_n: \exists \vec{x_i} \in V_i$:
$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_n} \in V$, διότι $x_i \in V_i \subseteq V$, $1 \le i \le n$ και ο V: υπόχωρος του V

{Αν $X \subseteq E$ τότε: $\langle X \rangle$ ο υπόχωρος του E, ο οποίος παράγεται από το σύνολο διανυσμάτων X και $\langle X \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid x_i \in X, k \in \mathbb{N}, 1 \le i \le k\}$}

② Αν $V_i = \langle \beta_i \rangle$, $1 \le i \le n$ όπου $\beta_i \subseteq E$. Τότε $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \langle \bigcup_{i=1}^{n} \beta_i \rangle$
Προσοχή! Αν τα β_i: βάση του V_i, όπου $i = 1, \dots, n$ τότε γενικά $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_i$ δεν είναι βάση του $V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Ορισμός: Το άθροισμα $V_1+V_2+\dots+V_n$ καλείται ευθύ άθροισμα και τότε γράφουμε $V_1+V_2+\dots+V_n = V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_n \iff$

$\iff \vec{x_1}+\vec{x_2}+\dots+\vec{x_n} = \vec{x_1}'+\vec{x_2}'+\dots+\vec{x_n}'$, $\vec{x_i}\in V_i$ και $\vec{x_i}'\in V_i$, $1\le i\le n$

$\Rightarrow \vec{x_i}=\vec{x_i}'$, $1\le i\le n$

Μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του $V_1+V_2+\dots+V_n$ σαν άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων V_i, $1\le i\le n$

Παρατήρηση: Αν $n=2$ τότε: $V_1+V_2=V_1\oplus V_2 \iff V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$

($\Rightarrow$) Αν $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$ τότε αν $\vec{x}\in V_1\cap V_2$ τότε:

$\vec{x} = \underset{V_1}{\vec{x}} + \underset{V_2}{\vec{0}} = \underset{V_1}{\vec{0}} + \underset{V_2}{\vec{x}} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$

$\vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{x_1}'+\vec{x_2}'$, $\vec{x_1},\vec{x_1}'\in V_1$ και $\vec{x_2},\vec{x_2}'\in V_2$

$\Rightarrow \vec{x_1}-\vec{x_1}' = \vec{x_2}'-\vec{x_2}\in V_1\cap V_2=\{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{x_1}=\vec{x_1}'$ και $\vec{x_2}=\vec{x_2}'$

$\Rightarrow V_1+V_2=V_1\oplus V_2$

22/2/2019

Ευθέα Αθροίσματα Υποχώρων

Έστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $V_1, V_2, \dots, V_k$ υπόχωροι του E. Το άθροισμα των υποχώρων $V_1,V_2,\dots,V_k$ είναι το σύνολο

$$V_1+V_2+\dots+V_k = \sum_{i=1}^{k} V_i = \{\vec{x_1}+\vec{x_2}+\dots+\vec{x_k}\in E / \vec{x_i}\in V_i,\ 1\le i\le k\}$$

Τότε το $\sum_{i=1}^{k} V_i$ είναι υπόχωρος του E και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους υπόχωρους V_i, $i=1,\dots,k$

Παρατήρηση: (1) Έστω ότι $V_i=\langle B_i\rangle$, $i=1,\dots,k$. Τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = \langle \bigcup_{i=1}^{k} B_i \rangle$$